

Machines thermiques

7.1 Réfrigérateur

Un réfrigérateur se refroidit en rejetant de la chaleur dans l'environnement à température T^+ . La puissance mécanique fournie au dispositif est P_W et la puissance thermique, décrivant le transfert de chaleur à l'environnement, est P_Q . Déterminer la température la plus basse T^- que le système peut atteindre s'il a une efficacité maximale.

Application numérique

$P_W = 100 \text{ W}$, $P_Q = 350 \text{ W}$ et $T^+ = 25^\circ \text{ C}$.

7.1 Solution

La température la plus basse que le système peut atteindre est obtenue lorsque le réfrigérateur opère selon un cycle calorifique de Carnot. Alors, l'efficacité de refroidissement (7.42) d'un cycle de Carnot est donnée par (7.49),

$$\varepsilon_C^- = \frac{P_Q}{P_W} = \frac{T^-}{T^+ - T^-}$$

Ainsi, la température la plus basse T^- s'écrit,

$$T^- = \frac{P_Q}{P_Q + P_W} T^+ = -41^\circ \text{ C}$$

7.2 Centrale nucléaire refroidie par une rivière

Une centrale nucléaire opère entre un réservoir chaud constitué d'une chambre à combustion ou d'un réacteur nucléaire et un réservoir froid constitué de l'eau d'une rivière. Elle est modélisée comme une machine thermique opérant entre le réservoir chaud à température T^+ et un réservoir froid à température T^- . Analyser le fonctionnement de cette centrale nucléaire en suivant les instructions suivantes :

- 1) Déterminer le rendement maximal η_C de cette centrale nucléaire et la puissance thermique P_{Q^+} décrivant l'échange de chaleur avec la chambre de combustion.
- 2) Supposer que le rendement réel est $\eta = k \eta_C$ et déterminer la puissance thermique P_{Q^-} décrivant l'échange de chaleur avec la rivière.
- 3) Déterminer la différence de température ΔT avec l'eau s'écoulant avec un débit \dot{V} dans la rivière. L'eau a une masse volumique m et une chaleur spécifique par unité de masse à pression constante c_p^* .

Application numérique

$P_W = -750 \text{ MW}$, $T^+ = 300^\circ \text{C}$, $T^- = 19^\circ \text{C}$, $k = 60\%$, $\dot{V} = 200 \text{ m}^3/\text{s}$, $m = 1000 \text{ kg/m}^3$ et $c_p^* = 4181 \text{ J/kg K}$.

7.2 Solution

On a principalement examiné des cycles thermodynamiques constitués de processus distincts dans le chapitre 7. Ici, on considère une centrale nucléaire comme une machine thermique en régime stationnaire. Ainsi, il est plus naturel de la caractériser par sa puissance mécanique P_W , par la puissance thermique P_{Q^+} au réservoir chaud et par la puissance thermique P_{Q^-} au réservoir froid.

- 1) Le rendement maximal est le rendement du cycle de Carnot (7.46). On peut exprimer le rendement (7.38) en termes des puissances. Ainsi,

$$\eta_C = -\frac{P_W}{P_{Q^+}} = 1 - \frac{T^-}{T^+} = 49\%$$

Par conséquent, la puissance thermique P_{Q^+} qui décrit l'échange de chaleur avec le réservoir chaud est donné par,

$$P_{Q^+} = -P_W \frac{T^+}{T^+ - T^-} = 1.53 \text{ GW}$$

- 2) Comme la centrale nucléaire est en régime stationnaire, le premier principe (1.29) s'écrit,

$$\dot{U} = P_W + P_{Q^+} + P_{Q^-} = 0$$

ce qui implique que,

$$P_{Q^-} = - (P_W + P_{Q^+})$$

Le rendement (7.38) s'écrit,

$$\eta = k \eta_C = -\frac{P_W}{P_{Q^+}} \quad \text{ainsi} \quad P_{Q^+} = -\frac{P_W}{k \eta_C}$$

Ainsi,

$$P_{Q^-} = P_W \left(\frac{1 - k \eta_C}{k \eta_C} \right) = -1.80 \text{ GW}$$

- 3) Etant donné que la masse d'eau M est le produit de la masse volumique de l'eau m et du volume V , le débit de masse est donné par,

$$\dot{M} = m \dot{V}$$

La puissance thermique s'écrit,

$$P_{Q-} = \dot{M} c_p^* \Delta T = m \dot{V} c_p^* \Delta T$$

ce qui implique que la différence de température est donnée par,

$$\Delta T = \frac{P_{Q-}}{m \dot{V} c_p^*} = -2^\circ\text{C}$$

7.3 Cycle de freinage

Un système est constitué d'un cylindre vertical dont la section supérieure est scellée et dont la section inférieure est fermée par un piston. Une soupape A placée sur la section supérieure contrôle l'entrée de gaz et une autre soupape B (située à côté de la soupape A) est retenue par un ressort qui exerce une pression constante p_2 sur la soupape. Le système subit les processus suivants :

- 0 → 1 : Le piston est au sommet du cylindre ; la soupape A s'ouvre et le piston est abaissé de sorte que du gaz à pression atmosphérique $p_0 = p_1$ est amené dans le cylindre. Le gaz est à une température T_1 . La soupape B est fermée. Le volume maximal occupé par le gaz est V_1 .
- 1 → 2 : La soupape A est maintenant fermée et le piston monte suffisamment rapidement pour que le processus puisse être considéré comme adiabatique. La soupape B reste fermée durant la montée du piston aussi longtemps que la pression du gaz est inférieure à p_2 . Alors que le piston continue de monter, le gaz atteint la pression $p_2 = 10p_1$ à température T_2 dans un volume V_2 . On suppose que ce processus est réversible, donc les relations (5.90) et (5.83) s'appliquent.
- 2 → 3 : Alors que le piston continue de monter, la soupape B s'ouvre, la pression est $p_3 = p_2$ et le gaz est rejeté dans l'environnement. La soupape A reste fermée jusqu'à ce que le piston atteigne le sommet, où $V_3 = V_0 = 0$.
- 3 → 0 : La soupape B se ferme et la soupape A s'ouvre. Le système est alors prêt pour le prochain cycle.

Analyser le cycle en utilisant les instructions suivantes :

- 1) Esquisser le diagramme (p, V) pour les trois processus que le système subit.
- 2) Déterminer la température T_2 et le volume V_2 .
- 3) Déterminer le travail W effectué par cycle.

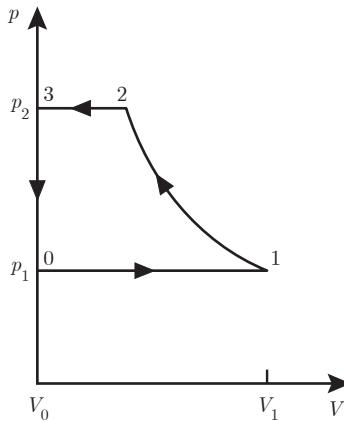


Fig. 7.1 Diagramme (p, V) du cycle de freinage.

Application numérique

$V_0 = V_3 = 0$, $p_0 = p_1 = 10^5$ Pa, $V_1 = 0.25$ l, $T_1 = 27^\circ$ C et $\gamma = 1.4$.

7.3 Solution

- 1) Le diagramme (p, V) est constitué d'une détente isobare $0 \rightarrow 1$, d'une compression adiabatique $1 \rightarrow 2$, d'une contraction isobare $2 \rightarrow 3$, et d'une détente isochore $3 \rightarrow 0$ (fig. 7.1).
- 2) Pour la compression adiabatique, la condition d'adiabacité (5.83) s'écrit,

$$T_1^\gamma p_1^{1-\gamma} = T_2^\gamma p_2^{1-\gamma}$$

ce qui implique que,

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_1 \left(\frac{1}{10} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 579 \text{ K}$$

La condition d'adiabacité (5.90) s'écrit,

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

ce qui implique que,

$$V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_1 \left(\frac{1}{10} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0.048 \text{ l}$$

- 3) Le travail effectué sur le gaz durant un cycle entier est la somme des travaux effectués durant les quatre processus,

$$W = W_{01} + W_{12} + W_{23} + W_{30}$$

Le travail effectué durant le processus isobare est,

$$W_{01} + W_{23} = -p_1 \int_0^{V_1} dV - p_2 \int_{V_2}^0 dV = -p_1 V_1 + p_2 V_2$$

Il n'y a pas de travail effectué durant le processus isochore,

$$W_{30} = 0$$

Le travail effectué durant le processus adiabatique est,

$$\begin{aligned} W_{12} &= - \int_{V_1}^{V_2} p dV = -p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_1 V_1^\gamma}{\gamma - 1} (V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}) \\ &= \frac{1}{\gamma - 1} (p_2 V_2 - p_1 V_1) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$W = \frac{\gamma}{\gamma - 1} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_1 (10 V_2 - V_1) = 80.5 \text{ kJ}$$

Vu que le travail W est positif, le système se comporte comme un frein qui s'oppose au mécanisme d'entraînement du piston

7.4 Expérience de Clément-Desormes

Il est possible de déterminer le coefficient γ d'un gaz parfait en mesurant les pressions obtenues à l'aide d'une série de processus thermiques connus sous le nom d'expérience de Clément-Desormes.⁽¹⁾ Contrairement à la définition qui en est faite habituellement, ici on considère que le gaz reste confiné dans une enceinte dont on fait varier le volume (fig. 7.2).

Le tube en U permet de mesurer la pression du gaz grâce au déplacement d'un liquide à l'intérieur du tube. Le volume du tube est négligeable par rapport au volume V de la sphère. Initialement, la vanne est ouverte et la pression p_0 est la pression atmosphérique, la température T_0 est la température ambiante et le volume V_0 est le volume total de gaz dans la sphère et la seringue. Ensuite, on ferme la vanne et le gaz qui se trouve dans la seringue est lentement injecté dans la sphère. Ce processus est une compression isotherme. On mesure alors la différence de la pression du gaz Δp_1 entre la pression intermédiaire p_1 et la pression initiale p_0 . Ensuite, on retire le piston de la seringue aussi rapidement que possible afin de ramener la pression du gaz dans la sphère à sa valeur initiale p_0 . Ce processus est une détente adiabatique. A la fin de la détente adiabatique, le volume de gaz dans la sphère et la seringue est V_2 et le système atteint un état d'équilibre thermique durant une compression isochore. On mesure alors

⁽¹⁾ G. Bruhat, *Thermodynamique*, Masson et C^{ie}, 6^e édition, 1968, p. 173

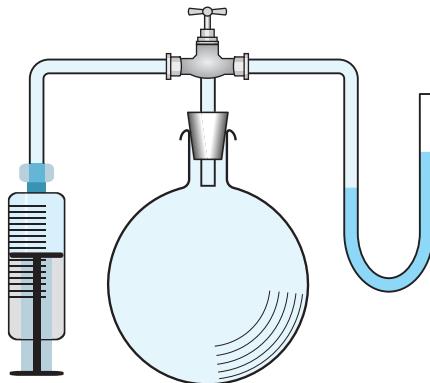


Fig. 7.2 Dans une mise en oeuvre particulière de la méthode de Clément-Desormes pour mesurer le coefficient γ d'un gaz, un tube en U est utilisé pour mesurer les variations de pression, et une seringue assure que les processus aient lieu avec une quantité de gaz fixée.

la différence de pression Δp_2 entre la pression finale p_2 et la pression initiale p_0 . Montrer que les différences de pressions mesurées peuvent être utilisées pour déterminer le coefficient γ d'après la relation,

$$\gamma \simeq \frac{\Delta p_1}{\Delta p_1 - \Delta p_2}$$

Cette approximation est satisfaite dans la limite où $\Delta p_1 \ll p_0$ et $\Delta p_2 \ll p_0$. Utiliser un développement limité au 1^{er} ordre en $\Delta p_1/p_0$ et $\Delta p_2/p_0$ pour établir ce résultat.

7.4 Solution

Dans l'état initial, le gaz parfait a un volume V_0 , une pression p_0 et une température T_0 . D'après l'équation d'état (5.47) d'un gaz parfait,

$$p_0 V_0 = N R T_0$$

A la fin du processus de compression isotherme à température T_0 , le gaz parfait a une pression p_1 et il est entièrement contenu dans la sphère de volume V . D'après l'équation d'état (5.47) d'un gaz parfait,

$$p_1 V = N R T_0$$

A la fin du processus de détente adiabatique, la pression du gaz parfait est égale à la pression initiale p_0 et le volume de gaz dans la sphère et la seringue est V_2 . D'après l'équation (5.90),

$$p_1 V^\gamma = p_0 V_2^\gamma$$

A la fin du processus de compression isochore à volume V_2 , la pression du gaz parfait est p_2 et la température du gaz dans la sphère et la seringue est égale à la température initiale T_0 . D'après l'équation (5.47),

$$p_2 V_2 = N R T_0$$

Des équations précédentes, on tire que,

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{V_2}{V} \right)^\gamma = \left(\frac{NRT_0}{p_2} \frac{p_1}{NRT_0} \right)^\gamma = \left(\frac{p_1}{p_0} \frac{p_0}{p_2} \right)^\gamma$$

En utilisant les définitions $p_1 = p_0 + \Delta p_1$ et $p_2 = p_0 + \Delta p_2$, l'expression précédente devient,

$$1 + \frac{\Delta p_1}{p_0} = \left(1 + \frac{\Delta p_1}{p_0} \right)^\gamma \left(1 + \frac{\Delta p_2}{p_0} \right)^{-\gamma}$$

Vu que les variations de pression sont faibles par rapport à la pression initiale, i.e. $\Delta p_1 \ll p_0$ et $\Delta p_2 \ll p_0$, le développement au 1^{er} ordre en $\Delta p_1/p_0$ et $\Delta p_2/p_0$ s'écrit,

$$1 + \frac{\Delta p_1}{p_0} \simeq \left(1 + \gamma \frac{\Delta p_1}{p_0} \right) \left(1 - \gamma \frac{\Delta p_2}{p_0} \right)$$

ou encore,

$$1 + \frac{\Delta p_1}{p_0} \simeq 1 + \gamma \left(\frac{\Delta p_1}{p_0} - \frac{\Delta p_2}{p_0} \right) - \gamma^2 \frac{\Delta p_1}{p_0} \frac{\Delta p_2}{p_0}$$

où le dernier terme est un terme du 2^e ordre que l'on peut négliger. Ainsi, on obtient la relation,

$$\Delta p_1 \simeq \gamma (\Delta p_1 - \Delta p_2)$$

ce qui implique que,

$$\gamma \simeq \frac{\Delta p_1}{\Delta p_1 - \Delta p_2}$$

7.5 Cycle de Lenoir

Le cycle Lenoir est un modèle de fonctionnement de moteur à combustion qui a été breveté par Jean Joseph Etienne Lenoir en 1860. Ce cycle est défini par trois processus réversibles :

- 1 → 2 compression isochore
- 2 → 3 détente adiabatique
- 3 → 1 compression isobare

On suppose que le cycle est effectué sur un gaz parfait caractérisé par le coefficient c (5.62). Les valeurs suivantes de certaines variables d'état sont supposées connues : la pression p_1 , les volumes V_1 et V_3 , la température T_1 et le nombre de moles de gaz N . Analyser ce cycle en utilisant les instructions suivantes :

- 1) Esquisser les diagrammes (p, V) et (T, S) du cycle.
- 2) Déterminer la variation d'entropie ΔS_{12} du gaz durant le processus isochore 1 → 2.
- 3) Exprimer la température T_2 en termes de la chaleur échangée Q_{12} durant le processus isochore 1 → 2.

- 4) Déterminer la pression p_2 en termes de la pression p_1 , le volume V_1 et la chaleur échangée Q_{12} .
- 5) Déterminer la pression p_3 en termes de la pression p_2 et des volumes V_2 et V_3 .
- 6) Déterminer le travail W_{23} effectué durant le processus adiabatique $2 \rightarrow 3$ et la chaleur Q_{23} échangée durant ce processus.
- 7) Déterminer le travail W_{31} effectué durant le processus isobare $3 \rightarrow 1$ et la chaleur Q_{31} échangée durant ce processus.
- 8) Etablir l'expression explicite du rendement de ce cycle η_L défini en conformité avec la relation (7.38) comme,

$$\eta_L = - \frac{W_{23} + W_{31}}{Q_{12}}$$

Exprimer le rendement η_L en termes des températures T_1 , T_2 et T_3 .

7.5 Solution

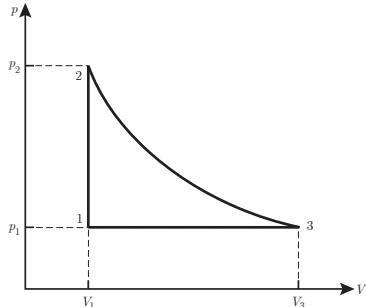


Fig. 7.3 Diagramme (p, V) de Lenoir

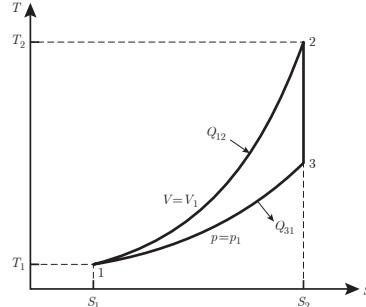


Fig. 7.4 Diagramme (T, S) de Lenoir

- 1) Pour le processus isochore, $V = V_1 = V_2 = \text{cste}$ (fig. 7.3). Pour le processus adiabatique, d'après la relation (5.90), $p(V) = \text{cste}/V^\gamma$ où $\gamma > 1$ et $\text{cste} = p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$. La pression $p(V)$ est une fonction convexe monotone décroissante de V . Pour le processus isobare, $p(V) = p_3 = p_1 = \text{cste}$. Pour le processus isochore, d'après la relation (7.20), $T(S) = T_1 \exp((S - S_1)/cNR)$, qui est une fonction monotone croissante de S (fig. 7.4). Pour le processus adiabatique, $S = S_1 = S_2 = \text{cste}$. Pour le processus isobare, d'après la relation (7.23), $T(S) = T_1 \exp((S - S_1)/(c + 1)NR)$, qui est une fonction monotone croissante de S .
- 2) D'après la relation (7.20), le travail effectué durant le processus isochore s'annule,

$$\Delta S_{12} = cNR \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = (c + 1)NR \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right)$$

- 3) D'après la relation (7.19), la chaleur échangée durant le processus isochore s'écrit,

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = \int_{U_1}^{U_2} dU = cNR \int_{T_1}^{T_2} dT = cNR(T_2 - T_1)$$

Ainsi,

$$T_2 = T_1 + \frac{Q_{12}}{cNR}$$

- 4) A l'aide de l'équation d'état du gaz parfait (5.47), la pression p_2 est donnée par,

$$p_2 = \frac{NRT_2}{V_2} = \frac{NR}{V_1} \left(T_1 + \frac{Q_{12}}{cNR} \right) = p_1 + \frac{Q_{12}}{cV_1}$$

- 5) D'après la relation (5.90) pour un processus adiabatique,

$$p_3 = p_2 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^\gamma$$

- 6) D'après les relations (7.14) et (7.13), le travail effectué durant le processus adiabatique est donné par,

$$W_{23} = \Delta U_{23} = cNR \int_{T_2}^{T_3} dT = cNR(T_3 - T_2)$$

et il n'y a pas de chaleur échangée,

$$Q_{23} = \int_{T_2}^{T_3} TdS = 0$$

- 7) D'après les relations (7.21) et (7.22) qui caractérisent le processus isobare, le travail effectué peut s'écrire,

$$W_{31} = - \int_{V_3}^{V_1} p dV = - p_1 \int_{V_3}^{V_1} dV = - p_1 (V_1 - V_3) = NR(T_3 - T_1)$$

et la chaleur échangée est donnée par,

$$Q_{31} = \Delta H_{31} = \int_{H_3}^{H_1} dH = (c+1)NR \int_{T_3}^{T_1} dT = (c+1)NR(T_1 - T_3)$$

Ce transfert de chaleur n'a pas lieu durant un processus isotherme. Ainsi, il ne peut pas être décrit par un transfert de chaleur à un réservoir thermique.

- 8) A l'aide des résultats obtenus ci-dessus et compte tenu du coefficient $\gamma = (c+1)/c$, le rendement η_L du cycle de Lenoir s'écrit,

$$\begin{aligned} \eta_L &= - \frac{W_{23} + W_{31}}{Q_{12}} = \frac{c(T_2 - T_3) + (T_1 - T_3)}{c(T_2 - T_1)} \\ &= \frac{T_1 + cT_2 - (c+1)T_3}{c(T_2 - T_1)} = \frac{(\gamma - 1)T_1 + T_2 - \gamma T_3}{T_2 - T_1} = 1 - \gamma \frac{T_3 - T_1}{T_2 - T_1} \end{aligned}$$

7.6 Cycle moteur de Brayton

Un gaz parfait subit quatre processus réversibles formant le cycle moteur de Brayton (fig. 7.5) :

- 1 → 2 compression adiabatique,
- 2 → 3 expansion isobare,
- 3 → 4 détente adiabatique,
- 4 → 1 contraction isobare.

Les pressions p_1 et p_2 ainsi que les volumes V_1 et V_3 sont supposés connus.

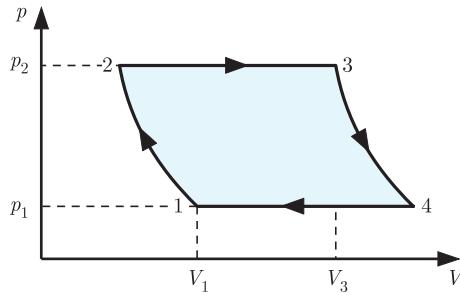


Fig. 7.5 Diagramme (p, V) du cycle moteur de Brayton.

- 1) Déterminer le travail effectué W_{34} lors de la détente adiabatique $3 \rightarrow 4$.
- 2) Déterminer la chaleur fournie Q_{23} lors de l'expansion isobare $2 \rightarrow 3$.
- 3) Déterminer la variation d'entropie ΔS_{41} lors de la contraction isobare $4 \rightarrow 1$.
- 4) Esquisser le diagramme (T, S) du cycle.

7.6 Solution

- 1) D'après l'expression (7.14) du travail effectué pour un processus adiabatique,

$$W_{34} = \Delta U_{34} = cNR \int_{T_3}^{T_4} dT = cNR(T_4 - T_3)$$

Compte tenu de l'équation d'état (5.47) du gaz parfait,

$$p_3V_3 = NRT_3 \quad \text{et} \quad p_4V_4 = NRT_4$$

des propriétés des processus isobares,

$$p_3 = p_2 \quad \text{et} \quad p_4 = p_1$$

et de la propriété (5.90) d'un processus adiabatique,

$$p_3V_3^\gamma = p_4V_4^\gamma \quad \Rightarrow \quad V_4 = \left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{1/\gamma} V_3 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma} V_3$$

le travail effectué W_{34} est mis sous la forme,

$$W_{34} = c(p_4V_4 - p_3V_3) = c(p_1V_4 - p_2V_3) = cV_3 \left(p_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/\gamma} - p_2 \right)$$

2) D'après l'expression (7.22) de la chaleur fournie pour un processus isobare,

$$Q_{23} = \Delta H_{23} = (c+1) NR \int_{T_2}^{T_3} dT = (c+1) NR (T_3 - T_2)$$

Compte tenu de l'équation d'état (5.47) du gaz parfait,

$$p_2V_2 = NR T_2 \quad \text{et} \quad p_3V_3 = NR T_3$$

de la propriété d'un processus isobare,

$$p_3 = p_2$$

et de la propriété (5.90) d'un processus adiabatique,

$$p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma \quad \Rightarrow \quad V_2 = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/\gamma} V_1$$

la chaleur fournie Q_{23} est mise sous la forme,

$$\begin{aligned} Q_{23} &= (c+1)(p_3V_3 - p_2V_2) = (c+1)p_2(V_3 - V_2) \\ &= (c+1)p_2 \left(V_3 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/\gamma} V_1 \right) \end{aligned}$$

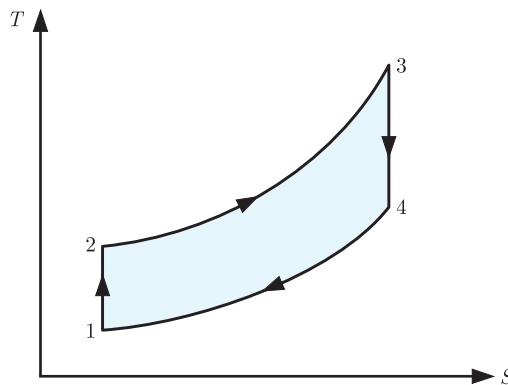


Fig. 7.6 Diagramme (T, S) du cycle moteur de Brayton.

3) D'après la définition (7.23) de la variation d'entropie pour un processus isobare, de l'équation d'état (5.47) du gaz parfait et de la propriété d'un

processus adiabatique énoncée précédemment, on obtient,

$$\begin{aligned}\Delta S_{41} &= \int_4^1 \frac{dH}{T} = (c+1) NR \int_{T_4}^{T_1} \frac{dT}{T} = (c+1) NR \ln\left(\frac{T_1}{T_4}\right) \\ &= (c+1) NR \ln\left(\frac{V_1}{V_4}\right) = (c+1) NR \ln\left(\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma} \frac{V_1}{V_3}\right)\end{aligned}$$

- 4) En inversant l'expression (7.12) de la variation d'entropie pour un processus adiabatique, ces processus sont représentées par des droites verticales sur un diagramme (T, S) . En inversant l'expression (7.23) de la variation d'entropie pour un processus isobare, on en déduit que les processus isobares sont des exponentielles sur un diagramme (T, S) (fig. 7.6).

7.7 Cycle calorifique de Stirling

Un gaz parfait subit quatre processus réversibles formant le cycle calorifique de Stirling (fig. 7.7) :

- 1 → 2 compression isotherme,
- 2 → 3 détente isochore,
- 3 → 4 détente isotherme,
- 4 → 1 détente isochore.

Les volumes minimal V^- et maximal V^+ ainsi que les températures de la source chaude T^+ et de la source froide T^- sont supposés connus.

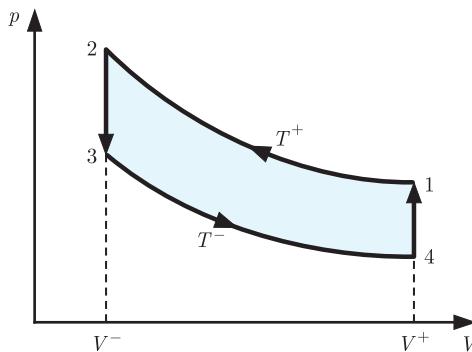


Fig. 7.7 Diagramme (p, V) du cycle calorifique de Stirling.

- 1) Déterminer les travaux W_{12} et W_{34} effectués lors de la compression $1 \rightarrow 2$ et de la détente $3 \rightarrow 4$ isothermes.
- 2) Déterminer les chaleurs fournies Q_{12} , Q_{23} , Q_{34} et Q_{41} lors de tous les processus et en déduire la chaleur fournie Q durant un cycle.

- 3) Déterminer l'efficacité de refroidissement ε^- du cycle calorifique.
- 4) Esquisser le diagramme (T, S) du cycle.

7.7 Solution

- 1) D'après la définition (7.15), les travaux effectués par les processus isothermes à températures T^+ et T^- sont donnés par,

$$W_{12} = - \int_1^2 p dV = - NRT^+ \int_{V^+}^{V^-} \frac{dV}{V} = - NRT^+ \ln \left(\frac{V^-}{V^+} \right)$$

$$W_{34} = - \int_3^4 p dV = - NRT^- \int_{V^-}^{V^+} \frac{dV}{V} = - NRT^- \ln \left(\frac{V^+}{V^-} \right)$$

- 2) D'après la définition (7.16), les chaleurs fournies par les processus isothermes à température T^+ et T^- s'écrivent,

$$Q_{12} = -W_{12} = NRT^+ \ln \left(\frac{V^-}{V^+} \right)$$

$$Q_{34} = -W_{34} = NRT^- \ln \left(\frac{V^+}{V^-} \right)$$

D'après la définition (7.19), les chaleurs fournies par les processus isochores à volume V^+ et V^- sont données par,

$$Q_{23} = \Delta U_{23} = cNR \int_{T^+}^{T^-} dT = cNR(T^- - T^+)$$

$$Q_{41} = \Delta U_{41} = cNR \int_{T^-}^{T^+} dT = cNR(T^+ - T^-)$$

La chaleur fournie Q durant un cycle est la somme des chaleurs fournies durant les quatre processus,

$$Q = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41} = -NR(T^+ - T^-) \ln \left(\frac{V^+}{V^-} \right) < 0$$

- 3) Compte tenu du fait que la chaleur extraite de la source froide à température T^- est $Q^- = Q_{34}$ et que le travail effectué sur un cycle est opposé à la chaleur fournie durant ce cycle, i.e. $W = -Q$, l'efficacité de refroidissement (7.42) s'écrit,

$$\varepsilon^- = \frac{Q_{34}}{W} = - \frac{Q_{34}}{Q} = \frac{NRT^- \ln \left(\frac{V^+}{V^-} \right)}{NR(T^+ - T^-) \ln \left(\frac{V^+}{V^-} \right)} = \frac{T^-}{T^+ - T^-}$$

qui est égale à l'efficacité de refroidissement (7.49) du cycle de Carnot.

- 4) La définition (7.17) implique que les processus isothermes soient des droites horizontales sur un diagramme (T, S) . En inversant la définition (7.20) de la variation d'entropie pour un processus isochore, on en déduit que les processus isochores sont des exponentielles sur un diagramme (T, S) (fig. 7.8).

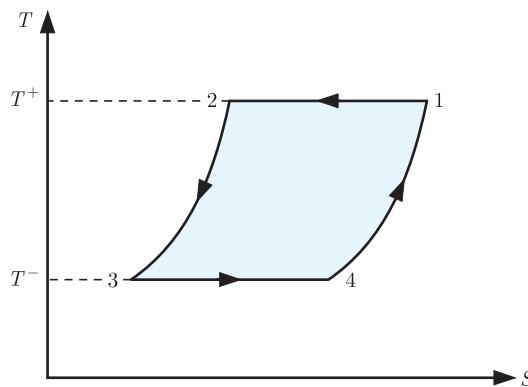


Fig. 7.8 Diagramme (T, S) du cycle calorifique de Stirling.

7.8 Cycle moteur de Diesel

Un gaz parfait subit quatre processus réversibles formant le cycle moteur de Diesel (fig. 7.9) :

- 1 → 2 compression adiabatique,
- 2 → 3 détente isobare,
- 3 → 4 détente adiabatique,
- 4 → 1 compression isochore.

La pression p_1 ainsi que les volumes V_1 , V_2 et V_3 sont supposés connus.

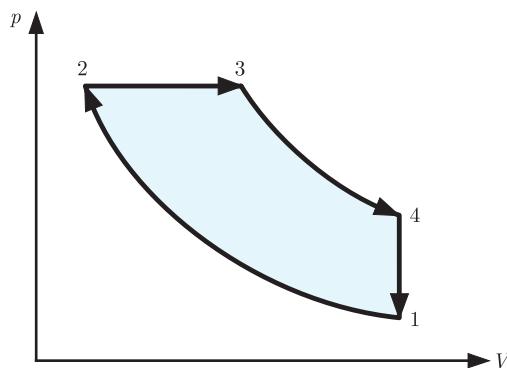


Fig. 7.9 Diagramme (p, V) du cycle moteur de Diesel.

- 1) Déterminer les pressions p_2 et p_4 .
- 2) Déterminer les variations d'entropie ΔS_{12} , ΔS_{23} , ΔS_{34} et ΔS_{41} lors de tous les processus et en déduire la variation d'entropie ΔS pour un cycle.

- 3) Déterminer les variations d'énergie interne ΔU_{12} , ΔU_{23} , ΔU_{34} et ΔU_{41} lors de tous les processus et en déduire la variation d'énergie interne ΔU pour un cycle.

7.8 Solution

- 1) Compte tenu de la propriété (5.90) d'un processus adiabatique la pression p_2 s'écrit,

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma$$

De plus, le processus isobare est caractérisé par des pressions égales, i.e. $p_2 = p_3$, et le processus isochore par des volumes égaux, i.e. $V_4 = V_1$. Ainsi la pression p_4 s'écrit,

$$p_3 V_3^\gamma = p_4 V_4^\gamma \quad \Rightarrow \quad p_4 = p_3 \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^\gamma = p_2 \left(\frac{V_3}{V_1} \right)^\gamma = p_1 \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^\gamma$$

- 2) A l'aide des définitions (5.68), (7.12), (7.20) et (7.23), les variations d'entropie ΔS_{12} , ΔS_{23} , ΔS_{34} et ΔS_{41} lors de tous les processus sont données par,

$$\Delta S_{12} = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{23} &= \int_2^3 \frac{dH}{T} = (c+1) NR \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = (c+1) NR \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right) \\ &= (c+1) NR \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right) \end{aligned}$$

$$\Delta S_{34} = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{41} &= \int_4^1 \frac{dU}{T} = c NR \int_{T_4}^{T_1} \frac{dT}{T} = c NR \ln \left(\frac{T_1}{T_4} \right) \\ &= c NR \ln \left(\frac{p_1}{p_4} \right) \end{aligned}$$

On en déduit que la variation d'entropie ΔS sur un cycle est nulle,

$$\Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} = 0$$

qui est une conséquence du fait que l'entropie S est une fonction d'état.

- 3) Compte tenu de l'équation d'état (5.47) du gaz parfait et de la définition (7.10), la variation d'énergie interne ΔU_{if} lors d'un processus réversible $i \rightarrow f$ est donnée par,

$$\Delta U_{if} = c NR \int_{T_i}^{T_f} dT = c NR (T_f - T_i) = c (p_f V_f - p_i V_i)$$

Ainsi, les variations d'énergie interne ΔU_{12} , ΔU_{23} , ΔU_{34} et ΔU_{41} lors de tous les processus sont données par,

$$\begin{aligned}\Delta U_{12} &= c(p_2V_2 - p_1V_1) = cp_1 \left(\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma V_2 - V_1 \right) \\ \Delta U_{23} &= c(p_3V_3 - p_2V_2) = cp_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma (V_3 - V_2) \\ \Delta U_{34} &= c(p_4V_4 - p_3V_3) = cp_1 \left(\left(\frac{V_3}{V_2} \right)^\gamma V_1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma V_3 \right) \\ \Delta U_{41} &= c(p_1V_1 - p_4V_4) = cp_1 \left(V_1 - \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^\gamma V_1 \right)\end{aligned}$$

On en déduit que la variation d'énergie interne ΔU sur un cycle est nulle,

$$\Delta U = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{34} + \Delta U_{41} = 0$$

qui est une conséquence du fait que l'énergie interne U est une fonction d'état.

7.9 Cycle d'Otto

Le cycle d'Otto est un modèle de un moteur à combustion qui représente le mode opératoire de la plupart des moteurs combustion non-diesel. Il est constitué de quatre processus lorsque le moteur est modélisé comme un système fermé, et de deux processus isobares supplémentaires lorsque le système est ouvert. Ces deux processus correspondent à l'admission d'air et l'échappement des gaz. Ainsi, on a,

- 0 → 1 admission isobare d'air
- 1 → 2 compression adiabatique
- 2 → 3 échauffement isochore
- 3 → 4 détente adiabatique
- 4 → 1 refroidissement isochore
- 1 → 0 échappement isobare des gaz

Supposer que les processus adiabatiques sont réversibles et que le gaz est un gaz parfait caractérisé par le coefficient c (5.62) et le coefficient $\gamma = (c + 1) / c$. Les valeurs suivantes de certaines variables d'état sont supposées connues : la pression p_1 , les volumes $V_1 = V_4$ et $V_2 = V_3$, la température T_3 et le nombre de moles N d'air à l'admission. Analyser ce cycle en utilisant les instructions suivantes :

- 1) Esquisser les diagrammes (p, V) et (T, S) du cycle. Sur le diagramme (p, V) , représenter aussi les processus d'admission et d'échappement.
- 2) Décrire ce que le moteur fait durant chaque processus.

- 3) Expliquer pourquoi un échange d'air avec l'extérieur est nécessaire.
- 4) Sur les diagrammes (p, V) et (T, S) déterminer les relations entre les aires délimitées par les cycles, le travail W et la chaleur Q par cycle.
- 5) Déterminer toutes les variables d'état aux points 1, 2, 3 et 4 du cycle, i.e. trouver p_2, p_3, p_4, T_2 et T_4 .
- 6) Déterminer le travail W effectué par cycle et la chaleur Q échangée durant un cycle.
- 7) Déterminer le rendement du cycle d'Otto,

$$\eta_O = -\frac{W}{Q^+}$$

où $Q^+ = Q_{23}$.

7.9 Solution

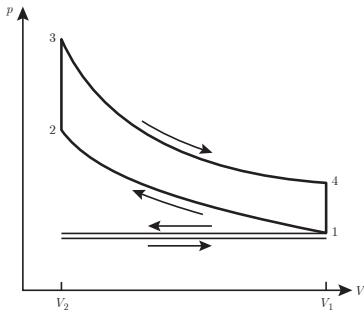


Fig. 7.10 Diagramme (p, V) d'Otto

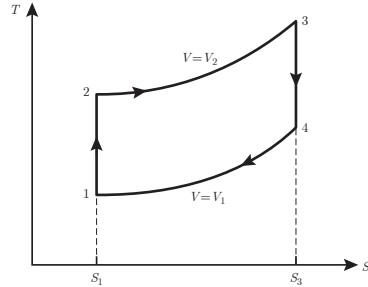


Fig. 7.11 Diagramme (T, S) d'Otto

- 1) Pour les processus isobares, $p(V) = p_1 = p_2 = \text{cste}$ (fig. 7.10). Pour les processus adiabatiques, d'après la relation (5.90), $p(V) = \text{cste}/V^\gamma$ où $\gamma > 1$ et $\text{cste} = p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$ ou $\text{cste} = p_3 V_3^\gamma = p_4 V_4^\gamma$. La pression $p(V)$ est une fonction convexe monotone décroissante de V . Pour les processus isochores, $V = V_2 = V_3 = \text{cste}$ ou $V = V_4 = V_1 = \text{cste}$. Pour les processus adiabatiques, $S = S_1 = S_2 = \text{cste}$ et $S = S_3 = S_4 = \text{cste}$ (fig. 7.11). Pour les processus isochores, d'après la relation (7.20), $T(S) = T_1 \exp((S - S_1)/cNR)$ et $T(S) = T_2 \exp((S - S_2)/cNR)$, qui sont des fonctions monotones croissantes de S .
- 2) Durant l'admission isobare d'air $0 \rightarrow 1$, une masse d'air est amenée dans le cylindre à pression atmosphérique constante p_1 lorsque le piston se déplace et le volume à l'intérieur du cylindre augmente de V_2 à V_1 . Durant la compression adiabatique $1 \rightarrow 2$, l'air à l'intérieur du cylindre est comprimé adiabatiquement par le piston d'un volume initial V_1 à un volume final V_2 . Durant le chauffage isochore $2 \rightarrow 3$, le mélange d'air et de carburant est allumé. Durant la détente adiabatique $3 \rightarrow 4$, la gaz subit une expansion adiabatique du volume initial V_3 au volume final V_4 , ce qui ramène le piston dans sa position initiale. A cet instant, le gaz occupe un volume

V_4 . Durant le refroidissement isochore $4 \rightarrow 1$, la chaleur est transférée à l'environnement jusqu'à ce que la pression parvienne à nouveau à la pression atmosphérique p_1 . Finalement, durant l'échappement isobare $4 \rightarrow 0$, le gaz est retiré du cylindre à pression atmosphérique constante p_1 sous l'effet du déplacement du piston, ce qui provoque une diminution du volume à l'intérieur du cylindre de V_1 à V_2 .

- 3) Un moteur qui fonctionne selon le cycle d'Otto est un moteur à combustion. Cela signifie que l'oxygène est essentiel pour que la réaction de combustion chimique puisse avoir lieu. Après chaque allumage, de l'air frais doit entrer dans le cylindre afin de permettre à une nouvelle réaction de combustion d'avoir lieu.
- 4) L'air délimitée par le cycle dans le diagramme (p, V) s'écrit,

$$\oint p dV = \int_{V_1}^{V_2} p dV + \int_{V_3}^{V_4} p dV = -W_{12} - W_{34} = -W$$

étant donné que $W_{23} = W_{41} = 0$. Ainsi, l'aire délimitée par le cycle dans le diagramme (p, V) représente l'opposé du travail W effectué par cycle. L'air délimitée par le cycle dans le diagramme (T, S) s'écrit,

$$\oint T dS = \int_{S_2}^{S_3} T dS + \int_{S_4}^{S_1} T dS = Q_{23} + Q_{41} = Q$$

étant donné que $Q_{12} = Q_{34} = 0$. Ainsi, l'aire délimitée par le cycle dans le diagramme (T, S) représente la chaleur Q échangée par cycle. Comme l'énergie interne U est une fonction d'état, on doit avoir $Q = -W$, en accord avec la relation (7.6).

- 5) A l'aide de la relation (5.90) et de l'équation d'état du gaz parfait (5.47), les pressions sont données par,

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \quad p_3 = \frac{N R T_3}{V_2} \quad p_4 = \frac{N R T_3}{V_1} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}$$

et les températures par,

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{N R} \quad T_2 = \frac{p_1 V_1}{N R} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \quad T_4 = T_3 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}$$

- 6) D'après la relation (7.14), les travaux effectués durant la compression et la détente adiabatique s'écrivent,

$$W_{12} = \Delta U_{12} = c N R \int_{T_1}^{T_2} dT = c N R (T_2 - T_1)$$

$$W_{34} = \Delta U_{34} = c N R \int_{T_3}^{T_4} dT = c N R (T_4 - T_3)$$

Le travail effectué par cycle est donné par,

$$W = W_{12} + W_{34} = c N R (T_4 - T_3 + T_2 - T_1)$$

D'après la relation (7.19), les chaleurs échangées durant le échauffement et le refroidissement isochores s'écrivent,

$$Q_{23} = \Delta U_{23} = \int_{U_2}^{U_3} dU = c NR \int_{T_2}^{T_3} dT = c NR (T_3 - T_2)$$

$$Q_{41} = \Delta U_{41} = \int_{U_4}^{U_1} dU = c NR \int_{T_4}^{T_1} dT = c NR (T_1 - T_4)$$

La chaleur échangée par cycle est donnée par,

$$Q = Q_{23} + Q_{41} = c NR (T_3 - T_2 + T_1 - T_4)$$

7) A l'aide de la définition du rendement (7.38), on obtient,

$$\eta_O = - \frac{W}{Q^+} = - \frac{W}{Q_{23}} = - \frac{c (T_4 - T_3 + T_2 - T_1)}{c (T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

7.10 Cycle d'Atkinson

James Atkinson était un ingénieur anglais qui a conçu plusieurs moteurs à combustion. Le cycle thermodynamique qui porte son nom est une modification du cycle d'Otto conçue pour améliorer son rendement. Le prix à payer pour parvenir à un meilleur rendement est une diminution du travail effectué par cycle. Le cycle idéalisé d'Atkinson est constitué des quatre processus réversibles suivants :

- 1 → 2 : compression adiabatique
- 2 → 3 : échauffement isochore
- 3 → 4 : échauffement isobare
- 4 → 5 : détente adiabatique
- 5 → 6 : refroidissement isochore
- 6 → 1 : refroidissement isobare

On suppose que les processus adiabatiques sont réversibles et que le cycle a lieu sur un gaz parfait est caractérisé par,

$$pV = NRT \quad U = cNRT \quad \gamma = \frac{c+1}{c}$$

Les grandeurs physiques suivantes qui caractérisent le cycle sont supposées connues : volumes V_1, V_2 et V_6 , pressions p_1 et p_3 , température T_5 et le nombre de moles N de gaz. Analyser ce cycle en utilisant les instructions suivantes :

- 1) Esquisser le diagramme (p, V) du cycle d'Atkinson.
- 2) Déterminer les pressions p_2, p_4, p_5, p_6 , les volumes V_3, V_4, V_5 et les températures T_1, T_2, T_3, T_4, T_6 , en termes des grandeurs physiques connues.

- 3) Déterminer les travaux W_{12} , W_{23} , W_{34} , W_{45} , W_{56} , W_{61} et le travail W effectué par cycle.
- 4) Déterminer les transferts de chaleur Q_{12} , Q_{23} , Q_{34} , Q_{45} , Q_{56} , Q_{61} et la chaleur $Q^+ = Q_{23} + Q_{34}$ fournie au gaz.
- 5) Déterminer le rendement du cycle d'Atkinson,

$$\eta_A = - \frac{W}{Q^+}$$

7.10 Solution

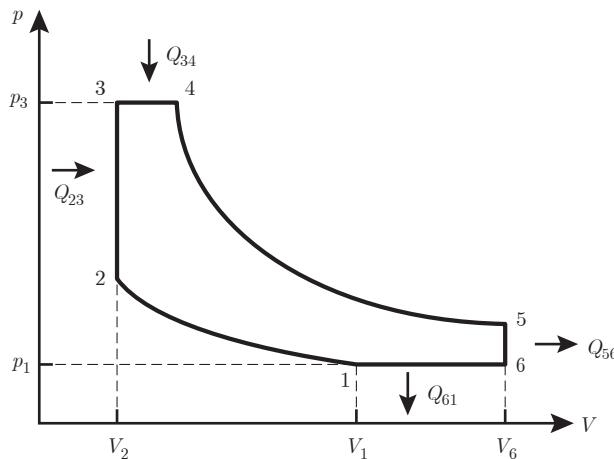


Fig. 7.12 Diagramme (p, V) du cycle d'Atkinson

- 1) Pour le processus adiabatique, d'après la relation (5.90), $p(V) = \text{cste}/V^\gamma$ où $\gamma > 1$ et $\text{cste} = p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$ ou $\text{cste} = p_4 V_4^\gamma = p_5 V_5^\gamma$. La pression $p(V)$ est une fonction convexe monotone décroissante de V (fig. 7.12). Pour les processus isochores, $V = V_2 = V_3 = \text{cste}$ or $V = V_5 = V_6 = \text{cste}$. Pour les processus isobares, $p(V) = p_3 = p_4 = \text{cste}$ ou $p(V) = p_6 = p_1 = \text{cste}$.
- 2) A l'aide de la relation (5.90) et de l'équation d'état du gaz parfait (5.47), les pressions sont données par,

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \quad p_4 = p_3 \quad p_5 = \frac{N R T_5}{V_6} \quad p_6 = p_1$$

et les volumes par,

$$V_3 = V_2 \quad V_4 = \left(\frac{N R T_5}{p_3} \right)^{\frac{1}{\gamma}} V_6^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad V_5 = V_6$$

Les températures s'écrivent,

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{p_1 V_1}{N R} & T_2 &= \frac{p_1 V_1}{N R} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} & T_3 &= \frac{p_3 V_3}{N R} \\ T_4 &= \left(\frac{p_3 V_6}{N R} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_5^{\frac{1}{\gamma}} & T_6 &= \frac{p_1 V_6}{N R} \end{aligned}$$

- 3) D'après la relation (7.14), les travaux effectués durant la compression adiabatique et la détente adiabatique s'écrivent,

$$\begin{aligned} W_{12} &= \Delta U_{12} = c N R \int_{T_1}^{T_2} dT = c N R (T_2 - T_1) \\ W_{45} &= \Delta U_{45} = c N R \int_{T_4}^{T_5} dT = c N R (T_5 - T_4) \end{aligned}$$

D'après la relation (7.18), il n'y a pas de travail effectués durant l'échauffement isochore et le refroidissement isochore,

$$W_{23} = W_{56} = 0$$

D'après la relation (7.21), les travaux effectués durant les processus isobares s'écrivent,

$$\begin{aligned} W_{34} &= - \int_3^4 p dV = - p_3 \int_{V_3}^{V_4} dV = - p_3 (V_4 - V_3) = N R (T_4 - T_3) \\ W_{61} &= - \int_6^1 p dV = - p_1 \int_{V_6}^{V_1} dV = - p_1 (V_1 - V_6) = N R (T_1 - T_6) \end{aligned}$$

Le travail effectué par cycle s'écrit,

$$\begin{aligned} W &= W_{12} + W_{34} + W_{45} + W_{61} \\ &= c N R (T_2 - T_1 + T_5 - T_4) + N R (T_4 - T_3 + T_1 - T_6) \end{aligned}$$

- 4) D'après la relation (7.13), il n'y a pas d'échange de chaleur durant la compression adiabatique et la détente adiabatique,

$$Q_{12} = Q_{45} = 0$$

D'après la relation (7.19), les chaleurs échangées durant l'échauffement isochore et le refroidissement isochore sont données par,

$$\begin{aligned} Q_{23} &= \Delta U_{23} = \int_{U_2}^{U_3} dU = c N R \int_{T_2}^{T_3} dT = c N R (T_3 - T_2) \\ Q_{56} &= \Delta U_{56} = \int_{U_5}^{U_6} dU = c N R \int_{T_5}^{T_6} dT = c N R (T_6 - T_5) \end{aligned}$$

D'après la relation (7.22), les chaleurs échangées durant les processus isobares s'écrivent,

$$Q_{34} = \Delta H_{34} = \int_{H_3}^{H_4} dH = (c+1) NR \int_{T_3}^{T_4} dT = (c+1) NR (T_4 - T_3)$$

$$Q_{61} = \Delta H_{61} = \int_{H_6}^{H_1} dH = (c+1) NR \int_{T_6}^{T_1} dT = (c+1) NR (T_1 - T_6)$$

La chaleur fournie au réservoir chaud s'écrit,

$$Q^+ = Q_{23} + Q_{34} = c NR (T_3 - T_2) + (c+1) NR (T_4 - T_3)$$

5) A l'aide de la définition du rendement (7.38), on obtient,

$$\eta_A = -\frac{W}{Q^+} = -\frac{c(T_2 - T_1 + T_5 - T_4) + (T_4 - T_3 + T_1 - T_6)}{c(T_3 - T_2) + (c+1)(T_4 - T_3)}$$

$$= \frac{(T_1 - T_2 + T_4 - T_5) + (\gamma - 1)(T_3 - T_4 + T_6 - T_1)}{(T_3 - T_2) + \gamma(T_4 - T_3)}$$

7.11 Cycle calorifique

Un gaz parfait caractérisé par le coefficient c (5.62) et le coefficient $\gamma = (c+1)/c$ subit un cycle calorifique constitué de quatre processus réversibles (fig. 7.13) :

- 1 → 2 : compression adiabatique
- 2 → 3 : compression isobare
- 3 → 4 : refroidissement isochore
- 4 → 1 : détente isobare

Analyser ce cycle en utilisant les instructions suivantes :

- 1) Déterminer le volume V_2 en termes des volumes V_1 et V_3 et des pressions p_1 et p_2 .
- 2) Déterminer la variation d'entropie ΔS_{23} durant la compression isobare.
- 3) Déterminer la chaleur échangée Q_{23} durant la compression isobare.
- 4) Supposer à présent qu'au lieu d'un gaz parfait on a utilisé un fluide qui est entièrement dans un état gazeux au point 2 et entièrement dans un état liquide au point 3. La compression isobare 2 → 3 est alors une transition de phase qui a lieu à la température T et qui est caractérisée par la chaleur latente molaire de vaporisation $\ell_{\ell g}$. Déterminer la variation d'entropie ΔS_{23} durant la transition de phase en termes du nombre de moles N de fluide, du volume V_2 , de la pression p_2 et de la chaleur latente molaire de vaporisation $\ell_{\ell g}$, en supposant que $pV = NRT$ dans la phase gazeuse.

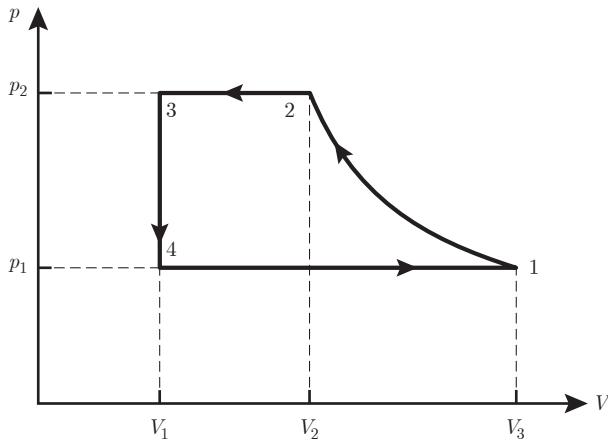


Fig. 7.13 Diagramme (p, V) du cycle calorifique

7.11 Solution

1) A l'aide de la condition d'adiabacité (5.90), le volume V_2 s'écrit,

$$V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

2) D'après la relation (7.23), la variation d'entropie durant la compression isobare est donnée par,

$$\Delta S_{23} = \int_{S_2}^{S_3} dS = (c + 1) NR \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = (c + 1) NR \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right)$$

3) D'après la relation (7.22), la chaleur échangée durant une compression isobare s'écrit,

$$Q_{23} = \Delta H_{23} = \int_{H_2}^{H_3} dH = (c + 1) NR \int_{T_2}^{T_3} dT = (c + 1) NR (T_3 - T_2)$$

4) D'après la relation (2.43), pour une processus isotherme comme une transition de phase à la température T ,

$$Q_{23} = T \int_{S_2}^{S_3} dS = T (S_3 - S_2) = T \Delta S_{23}$$

D'après les relations (6.44), (6.45) et l'équation d'état du gaz parfait (5.47),

$$\Delta S_{23} = \frac{Q_{23}}{T} = - \frac{Q_{\ell g}}{T} = - \frac{N \ell_{\ell g}}{T} = - \frac{N^2 R \ell_{\ell g}}{p_2 V_2}$$

7.12 Cycle de Rankine

Un gaz parfait caractérisé par le coefficient c (5.62) et le coefficient $\gamma = (c+1)/c$ subit un cycle moteur de Rankine constitué de quatre processus réversibles :

- 1 → 2 : détente isobare
- 2 → 3 : détente adiabatique
- 3 → 4 : compression isobare
- 4 → 1 : compression adiabatique

Ainsi, le cycle est représenté par un rectangle dans un diagramme (T, S) (fig. 7.14).

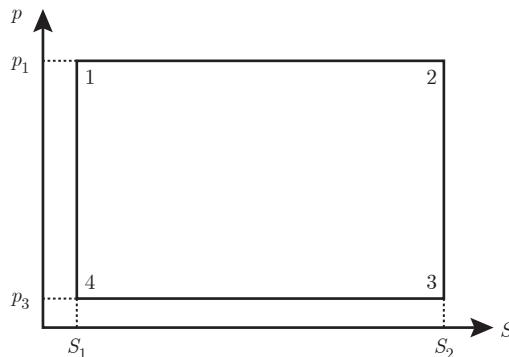


Fig. 7.14 Diagramme (T, S) d'un cycle de Rankine pour un gaz parfait.

Analyser ce cycle en utilisant les instructions suivantes :

- 1) Esquisser le diagramme (p, V) du cycle de Rankine pour un gaz parfait.
- 2) Déterminer les travaux effectués W_{12} , W_{23} , W_{34} et W_{41} et le travail effectué par cycle W en termes des enthalpies H_1 , H_2 , H_3 et H_4 .
- 3) Déterminer la chaleur fournie au réservoir chaud $Q^+ = Q_{12}$ en termes des enthalpies H_1 , H_2 , H_3 et H_4 .
- 4) Déterminer le rendement du cycle de Rankine pour un fluide parfait défini comme,

$$\eta_R = - \frac{W}{Q^+}$$

7.12 Solution

- 1) Pour les processus isobares, $p(V) = p_1 = p_2 = \text{cste}$ or $p(V) = p_3 = p_4 = \text{cste}$ (fig. 7.15). Pour les processus adiabatiques, d'après la relation (5.90), $p(V) = \text{cste}/V^\gamma$ où $\gamma > 1$ et $\text{cste} = p_1 V_1^\gamma = p_4 V_4^\gamma$ ou $\text{cste} = p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma$. La pression $p(V)$ est une fonction convexe monotone décroissante de V .

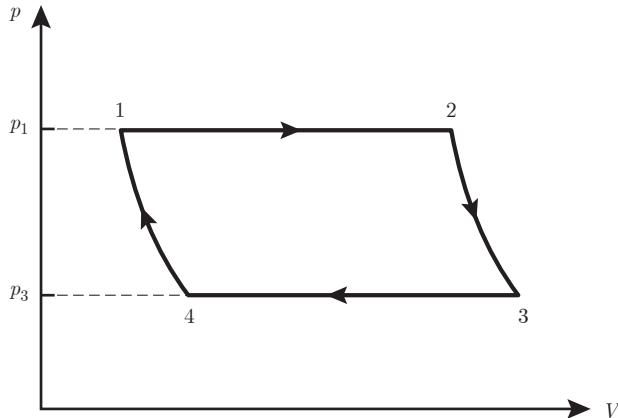


Fig. 7.15 Diagramme (p, V) d'un cycle de Rankine.

- 2) D'après la relation (7.21), les travaux effectués durant la détente isobare et la compression isobare sont donnés par,

$$W_{12} = - \int_1^2 p dV = - p \int_{V_1}^{V_2} dV = - p (V_2 - V_1) = - NR (T_2 - T_1)$$

$$W_{34} = - \int_3^4 p dV = - p \int_{V_3}^{V_4} dV = - p (V_4 - V_3) = - NR (T_4 - T_3)$$

D'après la relation (5.65), ces travaux peuvent être exprimés en fonctions des enthalpies comme,

$$W_{12} = \frac{1}{c+1} (H_1 - H_2) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} (H_1 - H_2)$$

$$W_{34} = \frac{1}{c+1} (H_3 - H_4) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} (H_3 - H_4)$$

D'après la relation (7.14), les travaux effectués durant la détente adiabatique et la compression adiabatique sont donnés par,

$$W_{23} = \Delta U_{23} = c NR \int_{T_2}^{T_3} dT = c NR (T_3 - T_2)$$

$$W_{41} = \Delta U_{41} = c NR \int_{T_2}^{T_3} dT = c NR (T_1 - T_4)$$

D'après la relation (5.65), ces travaux peuvent être exprimés en fonctions des enthalpies comme,

$$W_{23} = \frac{c}{c+1} (H_3 - H_2) = \frac{1}{\gamma} (H_3 - H_2)$$

$$W_{41} = \frac{c}{c+1} (H_1 - H_4) = \frac{1}{\gamma} (H_1 - H_4)$$

La travail effectué par cycle est donné par,

$$\begin{aligned}
 W &= W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} \\
 &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} (H_1 - H_2 + H_3 - H_4) + \frac{1}{\gamma} (H_3 - H_2 + H_1 - H_4) \\
 &= H_1 - H_2 + H_3 - H_4
 \end{aligned}$$

- 3) D'après la relation (7.22), la chaleur échangée durant la détente isobare est donnée par,

$$Q^+ = Q_{12} = \Delta H_{12} = H_2 - H_1$$

- 4) A l'aide de la définition (7.38) du rendement, on obtient,

$$\eta_R = -\frac{W}{Q^+} = -\frac{W}{Q_{12}} = -\frac{H_1 - H_2 + H_3 - H_4}{H_2 - H_1} = 1 - \frac{H_3 - H_4}{H_2 - H_1}$$

7.13 Cycle de Rankine pour un fluide biphasique

Un moteur est constitué d'une chaudière, d'un condensateur, d'une turbine et d'une pompe (fig. 7.16). Ce moteur subit un cycle de Rankine cycle pour un fluide biphasique (fig. 7.17). Le cycle est constitué de cinq processus :

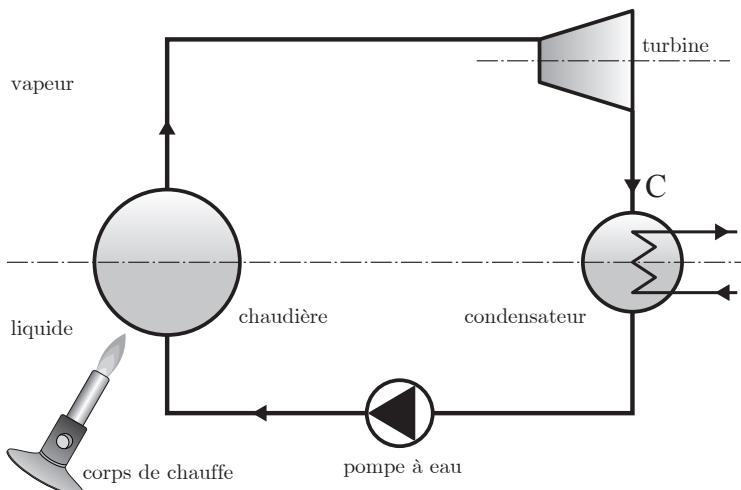


Fig. 7.16 Diagramme du moteur de Rankine pour un fluide biphasique.

- 1 → 2 : Le fluide sortant de la turbine est entièrement condensé (1). Le liquide subit alors une compression isentropique d'une pression initiale p_1 à une pression finale p_2 .
- 2 → 3 : Le liquide est chauffé à pression constante p_2 par la chaudière. Il subit un échauffement isobare jusqu'à ce qu'il parvienne à la température de vaporisation (3).

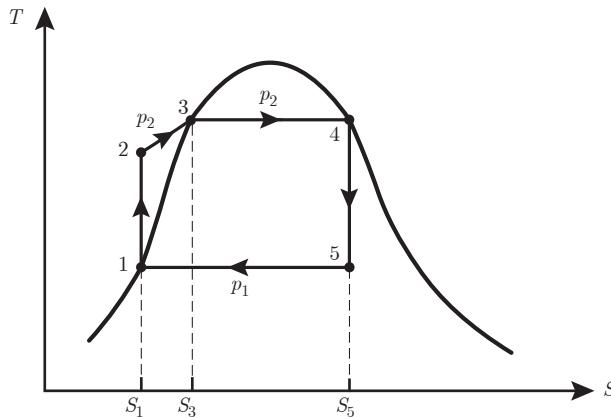


Fig. 7.17 Diagramme (T, S) du cycle de Rankine pour un fluide biphasique.

- 3 → 4 : Le liquide est vaporisé à pression constante p_2 . Il subit une transition de phase jusqu'à la vaporisation complète (4).
- 4 → 5 : Le gaz subit une détente isentropique d'une pression initiale p_2 à une pression finale p_1 .
- 5 → 1 : Le gaz est condensé à pression constante p_1 . Il subit une transition de phase jusqu'à la condensation complète (1).

Analysé ce cycle en utilisant les instructions suivantes :

- 1) Déterminer la chaleur fournie par la chaudière $Q^+ = Q_{23} + Q_{34}$, la chaleur libérée au condensateur $Q^- = Q_{51}$ en termes des enthalpies par unité de masse h_1^*, h_2^*, h_4^* et h_5^* et la masse M de fluide qui subit ce cycle (fig. 7.17).
- 2) Déterminer le travail effectué par la pompe W_{12} et le travail effectué sur la turbine W_{45} en termes des enthalpies par unité de masse h_1^*, h_2^* et h_5^* et de la masse M en utilisant les résultats obtenus pour le système présenté en sect. 4.14 et en supposant que la puissance mécanique est égale à la puissance chimique P_C du fluide traversant la pompe et la turbine, i.e. $P_W = P_C$.
- 3) Déterminer le rendement du cycle de Rankine pour un fluide biphasique défini comme,

$$\eta_R = - \frac{W}{Q^+}$$

7.13 Solution

- 1) Le chauffage isochore et la vaporisation ont lieu à pression constante p_2 . D'après la relation (4.61), la chaleur fournie par la chaudière s'écrit,

$$Q^+ = Q_{23} + Q_{34} = \Delta H_{23} + \Delta H_{34} = \Delta H_{24} = M (h_4^* - h_2^*)$$

La condensation a lieu à pression constante p_1 . D'après la relation (4.61), la chaleur fournie au condensateur est donnée par,

$$Q^- = Q_{51} = \Delta H_{51} = M (h_1^* - h_5^*)$$

- 2) Au vu de l'expression obtenue pour la puissance chimique P_C exercée sur un système ouvert dû au transfert de matière (sect. 4.14) et on supposant que la puissance mécanique P_W est due à la puissance chimique P_C du fluide circulant dans la pompe ou la turbine, on obtient,

$$P_W = P_C = \dot{M} (h_f^* - h_i^*)$$

où \dot{M} est le débit de masse, h_i^* et h_f^* sont les enthalpies initiales et finales par unité de masse qui sont constantes. En intégrant ce résultat par rapport au temps, on trouve le travail effectué durant le processus i \rightarrow f,

$$W_{if} = M (h_f^* - h_i^*)$$

Ainsi, le travail W_{12} effectué par la pompe sur le fluide est,

$$W_{12} = M (h_2^* - h_1^*)$$

et le travail W_{45} effectué par le fluide sur la turbine est,

$$W_{45} = M (h_5^* - h_4^*)$$

- 3) A l'aide de la définition du rendement (7.38), on obtient,

$$\eta_R = - \frac{W}{Q^+} = - \frac{W_{12} + W_{45}}{Q^+} = - \frac{h_2^* - h_1^* + h_5^* - h_4^*}{h_4^* - h_2^*} = 1 - \frac{h_5^* - h_1^*}{h_4^* - h_2^*}$$